GEOMETRIE : Les VECTEURS

DEFINITIONS

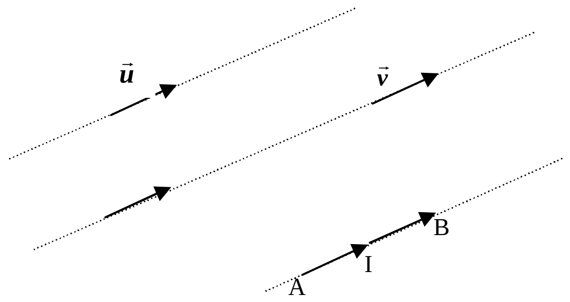
Un vecteur est défini par :

- ***une direction*** — Droite support
- ***un module*** — Sa longueur
- ***son sens*** — Orientation

Egalité vectorielle :

- Même direction
- Même module
- Même sens

$\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\|$

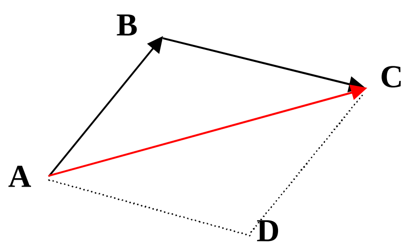


Définir un vecteur, c'est définir une famille de vecteurs parallèles, de même sens de même longueur

Addition de deux vecteurs :

Relation de Chasles

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$$



$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$

$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$

$\|\overrightarrow{AC}\| \leq \|\overrightarrow{AB}\| + \|\overrightarrow{BC}\|$

Multiplication par un réel : colinéarité

$$\boxed{\vec{v} = k \cdot \vec{u}}$$

Les vecteurs ***u*** et ***v*** sont <u>**colinéaires**</u> — Même direction

Si ***k>0*** le coefficient n'affecte que la longueur — $\|\vec{v}\| = k \cdot \|\vec{u}\|$

Si ***k<0*** le coefficient change sens et longueur — $\|\vec{v}\| = -k \cdot \|\vec{u}\|$

Vecteurs opposés :

$$\boxed{\vec{v} = - \cdot \vec{u}}$$

Même direction
Même module

Sens opposés

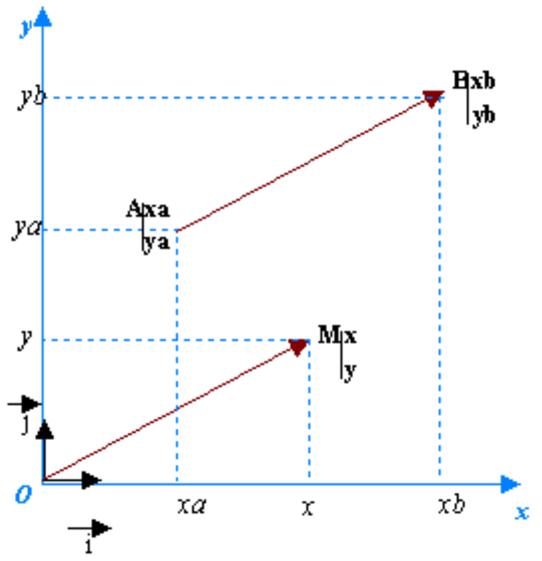
$$\vec{u} + \vec{v} = \vec{0}$$

GEOMETRIE : Les VECTEURS

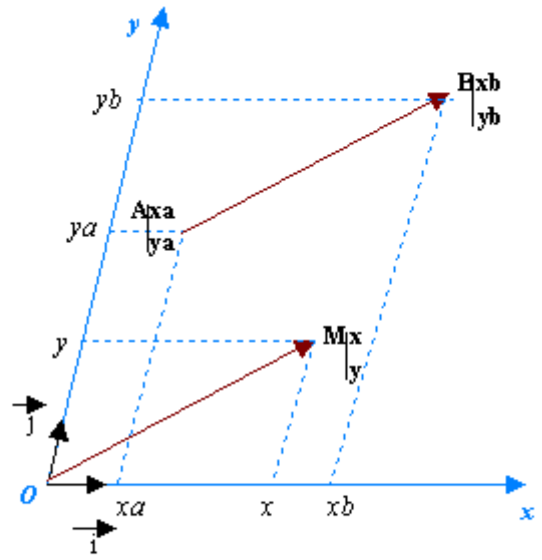
GEOMETRIE ANALYTIQUE :

Composantes en 2D

Repère orthonormé :



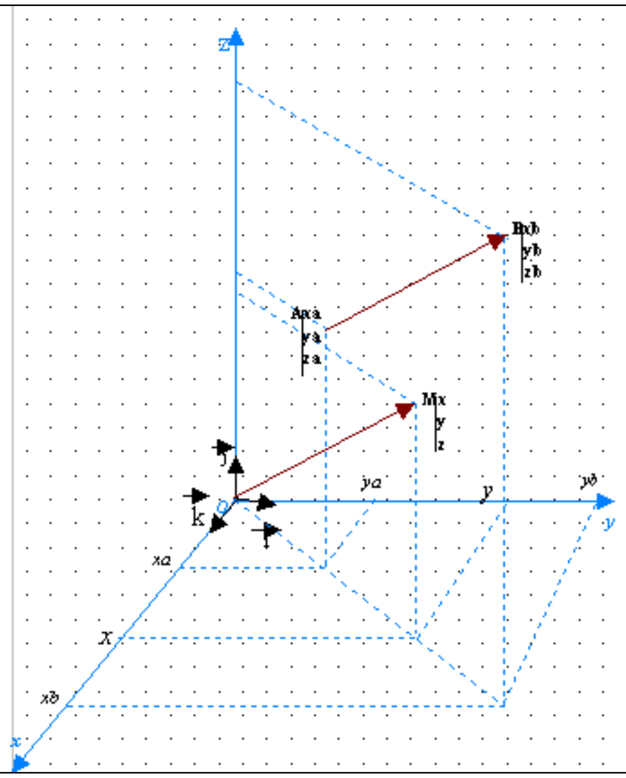
Repère quelconque :



$\overrightarrow{OM} = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j}$ soit $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OM}$

$\overrightarrow{AB} = (x_b - x_a) \cdot \vec{i} + (y_b - y_a) \cdot \vec{j}$

Composantes en 3D



On ajoute l'axe Oz vertical et son vecteur unitaire k

$\overrightarrow{OM} = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j} + z \cdot \vec{k}$

et

$\overrightarrow{AB} = (x_b - x_a) \cdot \vec{i} + (y_b - y_a) \cdot \vec{j} + (z_b - z_a) \cdot \vec{k}$

Pour bien retrouver les coordonnées, projeter M sur le plan xOy (le plancher), puis lire les coordonnées de cette projection. Projeter ensuite M sur Oz (altitude).

Règle générale :

Coordonnées d'un vecteur = Extrémité - origine

GEOMETRIE : Les VECTEURS

Module ou longueur d'un vecteur :

$\boxed{\left\|\overrightarrow{OM}\right\| = \sqrt{x^2 + y^2}}$

$\left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2 = (x_b - x_a)^2 + (y_b - y_a)^2$

On applique Pythagore

$\left\|\overrightarrow{OM}\right\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

$\left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2 = (x_b - x_a)^2 + (y_b - y_a)^2 + (z_b - z_a)^2$

Produit scalaire de deux vecteurs :

Analytique 2D	Vectoriel	Analytique 3D
$\vec{u} \bullet \vec{v} = \quad x \cdot x' + y \cdot y'$	C'est **un nombre** égal au produit des longueurs projetées : $\boxed{\vec{u} \bullet \vec{v} = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos\theta}$	$\vec{u} \bullet \vec{v} = \quad x \cdot x' + y \cdot y' + z \cdot z'$

Propriétés :

Pour tout vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ et pour tout réel α,

$\vec{u} \,.\, \vec{v} = \vec{v} \,.\, \vec{u}$

$(\alpha \vec{u}).\, \vec{v} = \vec{u} .(\alpha \vec{v}) = \alpha (\vec{u} \,.\, \vec{v})$.

$\vec{u} .(\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \,.\, \vec{v} + \vec{u} \,.\, \vec{w}$

Produit vectoriel de deux vecteurs : *(N'est pas au programme du secondaire)*

Analytique 2D	Vectoriel	Analytique 3D
	C'est **un vecteur** orthogonal aux vecteurs u et v et de module : $\boxed{\left\|\vec{u} \wedge \vec{v}\right\| = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \sin\theta}$	$\vec{u} \wedge \vec{v} = \quad (yz' - y'z)\vec{i} + (zx' - z'x)\vec{j} + (xy' - x'y)\vec{k}$

Propriétés :

$\vec{w}$, produit vectoriel de $\vec{u}$ par $\vec{v}$, noté $\vec{u} \wedge \vec{v}$ vérifie :

Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires : $\vec{w} = 0$.

Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires :

- $\vec{w}$ est normal au plan (ABC)
- $(\vec{u} , \vec{v} , \vec{w})$ est une base directe
- $||\vec{w}|| = ||\vec{u}||*||\vec{v}||*\sin \widehat{BAC}$

Le produit vectoriel de deux vecteurs est nul si et seulement si ces vecteurs sont colinéaires.

Pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$, et pour tout réel k,

- $\vec{v} \wedge \vec{u} = - \vec{u} \wedge \vec{v}$
- $(k \vec{u}) \wedge \vec{v} = k*(\vec{u} \wedge \vec{v})$

$\vec{u} \wedge (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \wedge \vec{v} + \vec{u} \wedge \vec{w}$

GEOMETRIE : Les VECTEURS

Condition de colinéarité :

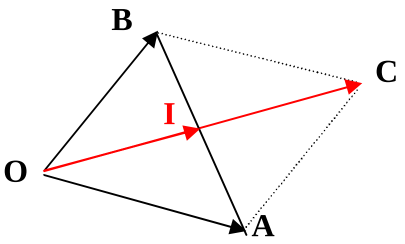
Analytique 2D	Vectoriel	Analytique 3D
$\det(\vec{u},\vec{v}) = \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} = xy' - x'y = 0$	$\vec{v} = k \cdot \vec{u} \quad k \in \Re \quad ou$ $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$	$\det(\vec{u},\vec{v}) = \begin{vmatrix} 1 & x & x' \\ 1 & y & y' \\ 1 & z & z' \end{vmatrix} = 0$

Conditon d'orthogonalité :

Analytique 2D	Vectoriel	Analytique 3D
$\vec{u} \bullet \vec{v} = \quad x \cdot x' + y \cdot y' = 0$	$\vec{u} \bullet \vec{v} = 0$	$\vec{u} \bullet \vec{v} = \quad x \cdot x' + y \cdot y' + z \cdot z' = 0$

GEOMETRIE VECTORIELLE :

Milieu d'un segment

Analytique 2D	Vectoriel	Analytique 3D
$x_I = \frac{x_A + x_B}{2}$ $y_I = \frac{y_A + y_B}{2}$	$2\overrightarrow{OI} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$ $2\overrightarrow{MI} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}$ 	$x_I = \frac{x_A + x_B}{2}$ $y_I = \frac{y_A + y_B}{2}$ $z_I = \frac{z_A + z_B}{2}$

Théorèmes de la médiane

$$MA^2 + MB^2 = 2\,MI^2 + \frac{AB^2}{2}$$

$$MA^2 - MB^2 = 2\,\overrightarrow{IM} \bullet \overrightarrow{AB}$$

$$\overrightarrow{MA} \bullet \overrightarrow{MB} = MI^2 - \frac{AB^2}{4}$$

Médiatrice

Lieu des points M tels que :

$$\|MA\| = \|MB\| \quad ou \quad \overrightarrow{IM} \bullet \overrightarrow{AB} = 0$$

GEOMETRIE : Les VECTEURS

Lignes de niveau

Données	Condition sur M	Lieu des points M
Origine O, vecteur $\vec{u}\begin{vmatrix} a \\ b \end{vmatrix}$ et $k \in \Re$	$\vec{u} \bullet \overrightarrow{OM} = k$	C'est une droite admettant ***u*** comme vecteur normal $ax + by = k$
Deux points A et B, I leur milieu et $k \in \Re$	$\overrightarrow{MA} \bullet \overrightarrow{MB} = k$	Equivaut à $MI^2 = k + \frac{AB^2}{4}$ ➢ C'est le point I quand $k = -\frac{AB^2}{4}$ ➢ Pas de solution quand $k < -\frac{AB^2}{4}$ ➢ Cercle de centre I rayon $\sqrt{k + \frac{AB^2}{4}}$
Deux points A et B, I leur milieu et $k \in \Re$	$MA^2 - MB^2 = k$	Equivaut à $2\overrightarrow{IM} \bullet \overrightarrow{AB} = k$ droites orthogonales à ***AB*** : ➢ Médiatrice quand ***k=0*** ➢ En ***IM=k/2AB*** quand ***k>0***
Deux points A et B, I leur milieu et $k \in \Re$	$MA^2 + MB^2 = k$	Equivaut à $2MI^2 + \frac{AB^2}{2} = k$ ➢ C'est le point I quand $k = \frac{AB^2}{2}$ ➢ Pas de solution quand $k < \frac{AB^2}{2}$ ➢ Cercle de centre I rayon $\sqrt{\frac{k}{2} - \frac{AB^2}{4}}$

Equations d'un cercle et d'une sphère

	Cercle en 2D		Sphère en 3D	
Vectorielle	$\|AM\| = R$	Centre ***A***, rayon ***R***	$\|AM\| = R$	Centre ***A***, rayon ***R***
Cartésienne	$(x - x_A)^2 + (y - y_A)^2 = R^2$		$(x - x_A)^2 + (y - y_A)^2 + (z - z_A)^2 = R^2$	
Vectorielle	$\overrightarrow{AM} \bullet \overrightarrow{BM} = 0$	Diamètre ***AB***	$\overrightarrow{AM} \bullet \overrightarrow{BM} = 0$	Diamètre ***AB***

Distance d'un point A à une droite , à un plan de vecteur normal n

Analytique 2D	Vectoriel	Analytique 3D
$AH = \frac{\lvert ax_A + by_A + c \rvert}{\sqrt{a^2 + b^2}}$	$AH = \frac{\left\lVert \overrightarrow{AH} \bullet \vec{n} \right\rVert}{\lVert \vec{n} \rVert}$	$AH = \frac{\lvert ax_A + by_A + cz_a + d \rvert}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$

GEOMETRIE : Les VECTEURS

Equations d'une droite et d'un plan

	Droite en 2D		Plan en 3D	
Réduite ou canonique	$y = mx + p$	m : coef directeur p : intersectionOy		
Cartésienne	$ax + by + c = 0$	$\vec{n}\begin{vmatrix} a \\ b \end{vmatrix}$ vecteur normal $\vec{d}\begin{vmatrix} -b \\ a \end{vmatrix}$ vecteurdirecteur	$ax + by + cz + d=0$	$\vec{n}\begin{vmatrix} a \\ b \\ c \end{vmatrix}$ vecteur normal
Vectorielle	$\det\left(\overrightarrow{AM},\vec{d}\right)=\begin{vmatrix} x-x_A & -b \\ y-y_A & a \end{vmatrix}=$ $(x-x_A)a+b(y-y_A)=0$	Passant par A, vecteur directeur d		
	$\overrightarrow{AM}\bullet\vec{n}=0$ $a(x-x_A)+b(y-y_A)=0$	Passant par A, vecteur normal n	$\overrightarrow{AM}\bullet\vec{n}=0$ $a(x-x_A)+b(y-y_A)+c(z-z_A)=0$	$\vec{n}\begin{vmatrix} a \\ b \\ c \end{vmatrix}$ vecteur normal
	$\overrightarrow{AM}\wedge\overrightarrow{AB}=\det\left(\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AB}\right)=0$ $(y_B-y_A)(x-x_A)$ $+(x_B-x_A)(y-y_A)=0$	Passant par A et B	$\overrightarrow{AM}=\alpha\ \overrightarrow{AB}+\beta\ \overrightarrow{AC}$	Passant par A B et C

Théorème d'Al Kashi

Généralisation de pythagore dans un triangle quelconque :

$$\boxed{BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2\,\overrightarrow{AB}\bullet\overrightarrow{AC}}$$

Barycentres

On généralise à n points les résultats établis pour deux ou trois points.

Soient A_1, A_2, ..., A_n n points et n réels. $\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n\neq 0$

Alors il existe un unique point G tel que

$$\boxed{\alpha_1\cdot\overrightarrow{GA_1}+\alpha_2\cdot\overrightarrow{GA_2}+\cdots+\alpha_n\cdot\overrightarrow{GA_n}=\vec{0}}$$

On dit aussi que G est le barycentre des points pondérés (A_1,α_1); (A_2, α_2), ... et (A_n, α_n),

ou encore que G est le barycentre du système $\{(A_1, \alpha_1); (A_2, \alpha_2); ...; (A_n, \alpha_n)\}$.

Pour tout point M du plan on a :

$$\boxed{\alpha_1\cdot\overrightarrow{MA_1}+\alpha_2\cdot\overrightarrow{MA_2}+\cdots+\alpha_n\cdot\overrightarrow{MA_n}=(\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_{n)}\cdot\overrightarrow{MG}}$$